Krzywe Lissajous

Marlena Garczewska

W dzisiejszych czasach prawie wszystko uległo komputeryzacji. Ja jednak postanowiłam przez chwile o niej nie myśleć. Przedmiot, któremu poświęciłam trochę uwagi stoi w naszej Sali Zbiorów Uniwersytetu Opolskiego. Jak wiem, jest on drugim na świecie a jedynym w Polsce takim przyrządem do kreślenia pięknych obrazków noszących nazwę krzywych Lissajous. Pomysł wykonania tego urządzenia na WSP w Opolu zrodził się w Princeton kiedy stypendyście Fulbrighta młodemu wykładowcy Wojciechowi Dindorfowi pokazał to cudo profesor Eric Rogers. WD został przyrządem zauroczony, a nie mając aparatu fotograficznego sporządził kilka szkiców na podstawie których warsztaty Katedry Fizyki już po dwóch miesiącach przekazały Sali Zbiorów tę – dziś już ponad 50-letnią – unikalną pomoc dydaktyczną.

Krzywe Lissajous wzięły swoją nazwę od ich autora Joule Antonie Lissjaous – francuskiego matematyka. Wykazał on, w jaki sposób kształt krzywych otrzymanych przez nałożenie na siebie dwóch wzajemnie prostopadłych ruchów harmonicznych, zależy od stosunku obu częstotliwości i od ich przesunięcia fazowego φ.

Ciekawym zbiegiem okoliczności jest to, że właśnie 4 marca 2012 w **190 rocznicę urodzin** Lissajous zaczęłam zbierać w jedną całość informacje dotyczące krzywych i ich „odkrywcy". Antoine przyszedł na świat w Versailles we Francji, a w wieku 19 lat rozpoczął studia i już po 8 latach pełnił funkcję profesora matematyki. Stopień doktora uzyskał w 1850 za wyznaczenia - przy korzystaniu z figur Chladniego - właściwości fal powstających w wibrujących prętach.

A teraz skrót teorii.

Mamy dwa prostopadłe do siebie ruchy opisane poniższymi wzorami:

$$x = a\cos(\omega t) \qquad (1)$$

$$y = a\cos(\omega t - \varphi) = a(\cos(\omega t)\cos\varphi + \sin(\omega t)\sin\varphi) \qquad (2)$$

φ oznacza opóźnienie w fazie drgania w kierunku osi y względem drgań w kierunku osi x i ma dowolną wartość.

Uwzględniając powyższe wzory otrzymamy:

$$y - x\cos\varphi = a\sin\omega t\sin\varphi \qquad (3)$$

Następnie mnożąc wzór (1) przez $\sin\varphi$ i podnosząc do kwadratu mamy:

$$x^2\sin^2\varphi = a^2\cos^2(\omega t)\sin^2\varphi \qquad (4)$$

Podnosząc wzór (3) do kwadratu otrzymujemy:

$$(y - x\cos\varphi)^2 = a^2\sin^2(\omega t)\sin^2\varphi \qquad (5)$$

Dodając do siebie stronami wzory (4) i (5) dostajemy:

$$(y - x\cos\varphi)^2 + x^2\sin^2\varphi = a^2\sin^2\varphi \qquad (6)$$

lub w innej postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{2xy\cos\varphi}{a^2} = \sin^2\varphi \qquad (7)$$

Wzory (6) i (7) opisują krzywą stożkową, za pomocą której w płaszczyźnie x i y otrzymujemy elipsę. Gdy $\varphi = \frac{\pi}{2}$ lub $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, mamy do czynienia z kołem, a z prostą kiedy φ=0 lub φ=π.

W przypadku gdy mamy różne amplitudy równania ruchów mają następującą postać:

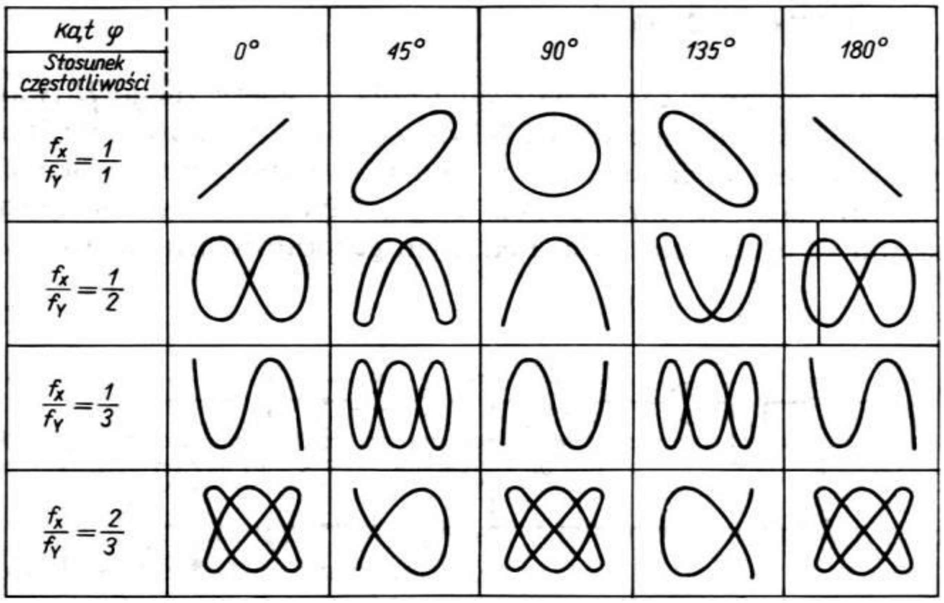
$$x = a\cos(\omega t) \qquad (8)$$

$$y = b\cos(\omega t - \varphi) = b(\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi) \qquad (9)$$

Postępując w taki sam sposób jak powyżej otrzymujemy:

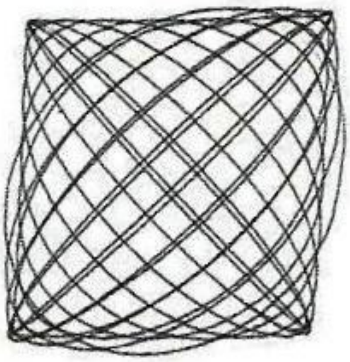
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi \qquad (10)$$

W zależności od wartości φ i od stosunku częstotliwości otrzymujemy mniej lub bardziej skomplikowane kształty figur Lissajous, które zamieszczone są na rysunku (1).



Rys 1. (z Internetu)

Są to ciekawe krzywe, mieszczące się w prostokącie o bokach 2a i 2b, gdzie a i b to amplitudy prostopadłych do siebie ruchów. W przypadku jednakowych amplitud krzywa mieści się w kwadracie o boku 2a. Na rysunku (2) widać, że prostokąt „zmniejsza się" co jest efektem tłumienia jakie tu zachodzi. Tłumienie wahań powoduje, że amplitudy maleją.



Rys. 2

Analizując jedną z figur Lissajous (rys 1.) zauważamy, że jeśli przetniemy je dwiema prostymi prostopadłymi do siebie to stosunek przecięć w poziomie i w pionie jest taki sam jak stosunek częstotliwości dwóch prostopadłych do siebie ruchów.

Zdjęcia pozwolą Czytelnikowi zapoznać się z budową przyrządu, gdzie główną rolę odgrywają dwie 3 kg masy, których pozycje na prętach (ok. 1m) wahadła można zmieniać.

Krzywe te otrzymujemy też za pomocą innego „antyku” z Sali Zbiorów UO - lusterek umieszczonych na końcu brzeszczotów pił do metalu, które odpowiednio oświetlone dają na ścianie „zajączki” zakreślające kształty podobne do krzywych Lissajous. Ale o tym w następnym wydaniu MF.

M.G.